Partielle Differentialgleichungen - Übungsblatt 3

Wintersemester 2019/2020

Dr. Thomas Stiehl, Chris Kowall

Abgabe: 12. November, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 3.1 *Konstante harmonische Funktionen* 5 Punkte

Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ harmonisch. Beweisen Sie die folgenden Aussagen mithilfe der Mittelwerteigenschaft für geeignet gewählte Kugeln.

(a) Ist u nicht-negativ, so ist u konstant.

(b) Ist $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, so ist u konstant 0.

Aufgabe 3.2 *Erweiterter Satz von Liouville für harmonische Funktionen* 5 Punkte

(a) Sei $z_0 \in \mathbb{R}^n, R > 0$ und die Funktion $u : \mathbb{B}_R(z_0) \to [0, \infty[$ sei harmonisch. Beweisen Sie die Ungleichung

$$u(x) \leq \frac{R^2}{R^2 - r^2} \left(\frac{R + r}{R - r} \right)^n u(y)$$

für alle $r \in]0, R[$ und $x, y \in \mathbb{B}_r(z_0)$.

Hinweis. Verwenden Sie die Darstellung von $u(x)$ mittels Poisson-Integral aus Korollar 2.2 auf $B_\rho(z_0)$ für ein $\rho \in]r, R[$, schätzen Sie geeignet ab und vollziehen Sie anschließend den Grenzübergang $\rho \to R$.

(b) Folgern Sie, dass jede einseitig beschränkte harmonische Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ bereits konstant ist.

Aufgabe 3.3 *Charakterisierung super-/subharmonischer Funktionen* 5 Punkte

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen für $n \geq 2$.

(a) Zeigen Sie, dass $u \in C^2(\Omega)$ genau dann subharmonisch ist wenn $\Delta u \geq 0$ gilt. Folgern Sie eine analoge Äquivalenz für superharmonische Funktionen.

(b) Sei $u \in C^2(\Omega)$ eine positive, harmonische Funktion. Untersuchen Sie, für welche Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion $v = u^\alpha$ sub-, superharmonisch oder harmonisch ist.